CONSTRUCTION DES HAUPTDURCHSCHNITTES DER REGULÄREN POLYEDER: NEBST D. ANWENDUNG...

Wilhelm Karl Fischer

Digitized by Google

Digitized by Google

Eine Bemerkung über die kantenberührende Kugel regulärer Körper.

In dem Programm, welches ich im Jahr 1842 über die regelmäßigen Polyeder schrieb, ist von einer kantenberührenden Kugel dieser Körper die Rede; dasselbe ist der Fall in dem gegenwärtigen Beitrag zur Lehre von den regelmäßigen Polyedern und zwar aus folgenden Gründen. Die Existenz einer solchen Kugel ist unbezweifelt, denn der Mittelpunkt der, einem regulären Polyeder um- und einbeschriebenen Kugeln ist auch von sämmtlichen Kanten gleichweit entfernt, und zwar trifft die Senkrechte nach den Kanten den Kanten-Mittelpunkt. Wie ferner eine reguläre ebene Figur, entsprechend ihren zwei Dimensionen und den zwei Bedingungen, die zu ihrer Existenz erforderlich sind, zwei Kreise bestimmt, die beide mit der Figur einerlei Mittelpunkt haben; so muß ein regulärer Körper gemäß seinen drei Dimensionen, gemäß den drei Bedingungen, die seine Definition enthält (gleiche Kanten, gleiche Kantenwinkel, gleiche Flächenwinkel), auch drei Kugeln bestimmen, die mit dem Körper einerlei Mittelpunkt haben. Auch läßt die Eigenschaft eines Körpers, daß man ihm eine Kanten berührende Kugel einschreiben kann, auf eine größere Regelmäßigkeit desselben schließen, als die ist, bei welcher es möglich wird, ihm eine Kugel einzuschreiben oder gar eine um ihn zu beschreiben. Umschrieben kann eine Kugel jeder Pyramide werden, wenn ihre sonst unregelmäßige Grundfläche nur noch die einzige Eigenschaft hat, daß sich ihr ein Kreis umschreiben läßt. Eine Kugel einbeschreiben kann man jeder Pyramide, welche zwei Bedingungen erfüllt: ihrer außerdem ganz beliebig gestalteten Grundfläche muß man einen Kreis einbeschreiben können, und die Höhe der Pyramide muß ihren Fuß im Mittelpunkt dieses Kreises haben. Jedwedes Tetraeder bestimmt eine um- und einbeschriebene Kugel u. s. f. Soll aber die Möglichkeit vorhanden seyn, einem Körper eine kantenberührende Kugel einzubeschreiben, so müssen allen Gränzflächen sich Kreise einschreiben lassen, deren Berührungspunkte durchgehends paarweise in einem Punkt einer Kante zusammenfallen; hiezu ist bei einer Pyramide erforderlich, daß sie senkrecht sey und eine regelmäßige Grundfläche habe, bei einem Prisma, daß die Grundflächen regelmäßig und die Seitenflächen Quadrate seyen, bei einem Polyeder mit gleichnamigen Grenzflächen, daß es entweder den regulären mathematischen angehöre, oder die Gestalt eines der regelmäßigeren Kristalle habe, von welchen letzteren übrigens hier nicht weiter die Rede seyn kann. Eben darum endlich, weil die kantenberührende Kugel mehr als die andern beiden Kugeln mit der Regelmäßigkeit eines Körpers in innigem Zusammenhang steht, ist sie, resp. ihr Durchmesser, zu einer klaren Erkenntniß vom Bau dieser Körper, zur Construction wichtiger Linien und Stücke und zur Berechnung des Kubikinhaltes derselben u. s. w. von vieler Wichtigkeit und zum Theil unent-

Digitized by Google

behrlich, wie diejenigen Lehrbücher der Stereometrie beweisen, die bei Berechnung des Ikosaeders und Dodekaeders sich dieses Kugeldurchmessers bedienen, wenn sie auch der Kugel selbst nicht gedenken, während sie doch der andern beiden erwähnen.

§. 1.

Die Construction der Grenzflächen der regulären Körper ist bekannt, doch wiederhole ich nicht ohne Grund die Construction der Dodekaederfläche.

Aufgabe. Ein reguläres Fünfeck zu construiren, wenn die Seite desselben gegeben ist.

Lösung. Man suche die Diagonale des Fünfecks, indem man (Fig. 1) die gegebene Seite zur einen Kathete **AB**, die Hälfte derselben zur andern Kathete **BC** macht, die Hypotenuse **AC** zieht, und um die Hälfte der gegebnen Seite, nämlich um $CD = BC = \frac{1}{2}AB$, verlängert; **AD** ist die Diagonale. — Nun construirt man ein gleichschenkliges Dreieck **ABE** (Fig. 2), dessen Grundlinie der Seite **AB**, dessen Schenkel der ebengesuchten Diagonale **AD** gleich sind; über **AE** und **EB** errichtet man endlich mit der gegebenen Seite gleichschenklige Dreiecke, so ist Fig. **ABHEG** das verlangte Fünfeck.

Beweis. Man schneide auf **AE** von **E** aus $EN = AB$ ab und denke **NB** gezogen, so erfährt man bekanntlich durch die Aehnlichkeit der Dreiecke **AEB** und **ABN**, daß $NB = NE = AB$ und Winkel **AEB**, den ich mit δ bezeichnen will, $= \frac{2R}{5} = 36°$, ferner W. $NEB = 3\delta$ und W. $AEB = 2\delta$ ist. — Aber $\triangle AGE \cong \triangle EHB \cong \triangle ENB$, daher W. H = W. G = W. $NEB = 3\delta$; W. $E = GEA + AEB + HEB = 3\delta$; W. $A = GAE + EAB = 3\delta$, so auch $B = 3\delta$. Das Fünfeck ist also gleichwinklig und gleichseitig ohnedem durch die Construction.

§. 2.

Begriffsbestimmung. Der Hauptdurchschnitt eines regulären Körpers ist diejenige begränzte Ebene, welche den Körper so durchschneidet, daß alle für denselben wichtige Linien, so wie auch der Neigungswinkel der Gränzflächen in ihr liegen. — Die erwähnten Linien sind erstens Linien der Seitenfläche, nämlich: die Kante **a**, die Höhe **h**, die Diagonale **d**, der Halbmesser des umschriebenen Kreises **r**, der des einbeschriebenen ϱ; zweitens die Halbmesser der drei durch den Körper bestimmten Kugeln: der kantenberührenden **R**, der umbeschriebenen R, der einbeschriebenen **P**, und andere für jeden Körper speziell wichtige Linien.*)

Zusatz. Der Hauptdurchschnitt steht bei den 4 Körpern: Tetraeder, Octaeder, Ikosaeder und Dodekaeder in dem Mittelpunkt der Kante auf derselben senkrecht, bei dem Würfel geht er durch vier

*) Statt in der Folge die oben erwähnten Linien mit Namen zu nennen, werde ich der Kürze wegen die angeführten Bezeichnungen gebrauchen. Den Neigungswinkel werde ich durch φ ausdrücken.

Digitized by Google

diagonal gegenüberliegende Ecken. Im Allgemeinen ist der Hauptdurchschnitt eines regulären Körpers gleich der senkrechten Projection desselben auf eine Ebene, auf welcher er mit der Kante so ruht, daß die Kantenaxe auf der Ebene senkrecht steht.

Construction der Hauptdurchschnitte der regulären Körper bei gegebener Kante.

§. 3.

Aufgabe. Der Hauptdurchschnitt eines Tetraeders und mit ihm alle wichtigen Linien dieses Körpers bei gegebener Kante a durch Construction zu finden.

Lösung. Man verzeichne Fig. 3 über $AB = a$ ein gleichseitiges Dreieck, des Körpers Gränzfläche, und suche $h = CD$. — Sodann errichte man über $AB = a$ (Fig. 4) ein gleichschenkliges Dreieck, so daß $AE = BE = h$ werden, so ist $\triangle ABE$ der verlangte Hauptdurchschnitt. — Zieht man nun die drei Höhen EF, AK, BJ des Dreiecks AEB, so muß (was zugleich als Probe der Zeichnung dienen kann) ihr Schnittpunkt G der Mittelpunkt von EF seyn, und es ist: $AB = a$; $AE = BE = h$; $JA = KB = r$; $JE = KE = \varrho$; ferner $GF = GE = \mathfrak{R}$; $GB = GA = R$; $GK = GJ = P$; $\mathfrak{W}. AEB = \varphi$; überdies ist $BJ = AK$, jede eine Höhe des Tetraeders.

§. 4.

Aufgabe. Den Hauptdurchschnitt eines Octaeders ꝛc. zu construiren.

Lösung. Man suche, wie bei dem Tetraeder, zuerst h. — Sodann errichte man, Fig. 5, sowohl über als unter $AB = a$ gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel AE, BE, BF, AF sämmtlich $= h$ werden müssen; die Raute, welche man erhält, ist der Hauptdurchschnitt des Octaeders. — Ferner verbinde man die Spitzen E und F durch eine Gerade, welche zugleich AB in M halbirt, und ziehe durch M die Geraden GJ senkrecht auf AE, und LH senkrecht zu EB, so ist:

$AB = a$; $AE = EB = AF = BF = h$; $EG = EH = FL = JF = r$; $GA = HB = LA = JB = \varrho$; $MA = MB = R$; $ME = MF = \mathfrak{R}$; $MG = MJ = MH = ML = P$ und $\mathfrak{W}. EAF = \varphi$.

§. 5.

Aufgabe. Den Hauptdurchschnitt ꝛc. eines Ikosaeders bei gegebener Kante zu construiren.

Auflösung. Man suche, wie bei den beiden vorhergehenden Körpern, zuerst h. — Hierauf suche man die Diagonale d eines Fünfeckes, welches die Kante a zur Seite hätte nach §. 1 (Fig. 1 ist $d = AD$). — Man construire sodann (Fig. 6) ein Rechteck $ABCD$, dessen kleinere Seite $AB = a$ und dessen größere $AD = d$ ist, auf den beiden größeren Seiten errichte man endlich gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel AE, DE, CF, BF sämmtlich $= h$ sind; so ist Sechseck $ABFDEC$

Digitized by Google

der verlangte Hauptdurchſchnitt. — Zieht man die Diagonalen des Rechteckes AC, BD, ferner die Linie EF, welche von ſelbſt durch M gehen muß, durch M die Gerade GH ‖ AD, dann JL ſenkrecht zu AE und KS ſenkrecht zu ED, ſo iſt:

AB = DC = a; AE = ED = BF = FC = h; JA = KB = SD = LC = r; JE = KF = ES = FL = ϱ; ME = MF = MG = MH = $\mathfrak{R}$; MA = MB = MC = MD = R; MJ = MS = MK = ML = P; W. AED = W. BFC = φ; überdies AD = BC = d und AF = BE = CE = DF = der Höhe eines von den Kanten gebildeten regelmäßigen Fünfecks.

§. 6.

Aufgabe. Den Hauptdurchſchnitt ꝛc. eines Würfels zu conſtruiren.

Löſung. Man ſuche zunächſt d der Gränzfläche mit Hilfe der Kante a. — Dann conſtruire man ein Rechteck (Fig. 7), deſſen kleinere Seite AB = a und deſſen größere Seite AC = d iſt, ſo hat man den verlangten Hauptdurchſchnitt. — Zieht man die Diagonalen AD und BC, durch ihren Mittelpunkt GH ‖ AB und EF ‖ AC, ſo iſt:

AB = CD = a; AC = BD = d; GA = GC = HB = HD = r; EA = EB = FC = FD = ϱ; ME = MF = $\mathfrak{R}$; MA = MB = MC = MD = R; MG = MH = P und jeder der rechten Winkel = φ.

§. 7.

Aufgabe. Den Hauptdurchſchnitt ꝛc. eines Dodekaeders zu conſtruiren.

Löſung. Man ſuche zunächſt d der Gränzfläche nach §. 1, in Fig. 1 iſt AD = d, dann conſtruire man wenigſtens das gleichſchenklige Dreieck AEB (Fig. 2) und ziehe von E nach AB ein Loth EK = h. — Hierauf ſuche man die Diagonale eines zweiten Fünfecks, von welchem d ſelbſt die Seite wäre, indem man zu d die Kante a addirt, alſo in Fig. 2 AE um AF = AB verlängert, es iſt EF = f. — Beſchreibt man ein Rechteck (Fig. 8), deſſen kleinere Seite AB = a, deſſen größere AC = f iſt und errichtet über den größeren Seiten gleichſchenklige Dreiecke, ſo daß AE = CE = BF = DF ſämmtlich = h werden, ſo iſt Sechseck ABFDCE der Hauptdurchſchnitt des Dodekaeders. — Zieht man in dieſem Hauptdurchſchnitt AD und BC, dann EF, welches von ſelbſt durch den Schnittpunkt der erſten beiden M gehen muß, ferner LJ ‖ BD und ebenſo durch M die Geraden GS und HK bezüglich ſenkrecht auf AE und BF, ſo iſt:

AB = CD = a; AC = BD = f; AE = CE = BF = DF = h; EG = EK = FH = FS = r; AG = BH = SD = CK = ϱ; ML = MF = MJ = ME = R; MA = MB = MD = MC = R; MG = MH = MS = MK = P; W. AEC = AFD = φ.

Digitized by Google

Netzconstruction der durch den Hauptdurchschnitt halbirten regelmäßigen Polyeder und ihrer Elementarpyramide bei gegebener Kante.

§. 8.

Aufgabe. Das Netz eines halben Tetraeders zu construiren.

Lösung. Man verzeichne nach §. 3 den Hauptdurchschnitt **ABE** (Fig. 9); errichte über **AB** ein gleichseitiges Dreieck, bezeichnet mit **I**, sodann über **AE** und **BE** die Hälften 1 und 2 von einem dem Dreieck **I** congruenten gleichseitigen Dreiecke, so daß die Höhen mit **AE** und **BE** zusammenfallen und die rechten Winkel bei **E** liegen.

§. 9.

Aufgabe. Das Netz des halbirten Octaeders zu construiren.

Lösung. Man verzeichne nach §. 4 den Hauptdurchschnitt **AEBF** (Fig. 10), lege an seine vier Seiten halbe Gränzflächen des Octaeders, nämlich 1, 2, 3, 4 mit den Höhen so, daß die Spitzen der rechten Winkel mit **A** und **B** zusammenfallen. Dann hänge man noch in entgegengesetzter Lage die beiden ganzen gleichseitigen Dreiecke **I** und **II** an.

§. 10.

Aufgabe. Das Netz des halbirten Ikosaeders zu construiren.

Lösung. Man verzeichne nach §. 5 den Hauptdurchschnitt (Fig. 11), errichte über den beiden Kanten **AB** und **DC** ganze Gränzflächen **I** und **II**, über den vier, den Höhen gleichen Seiten **AE**, **DE**, **EF**, **BF**, halbe Gränzflächen 1, 2, 3, 4, so daß die rechten Winkel bei **E** und **F** zu liegen kommen, an die Hypotenusen dieser vier halben hänge man wieder vier ganze Gränzflächen **III**, **IV**, **V**, **VI**, und endlich an zwei von diesen letzten in entgegengesetzter Lage die Gränzflächen **VII** und **VIII**.

§. 11.

Aufgabe. Das Netz des halben Würfels zu construiren.

Lösung. Man verzeichne nach §. 6 den Hauptdurchschnitt (Fig. 12), errichte über den kleineren Seiten **AB** und **CD** Quadrate, über den größeren Seiten gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel = a sind.

§. 12.

Aufgabe. Das Netz des halben Dodekaeders zu construiren.

Lösung. Man verzeichne nach §. 7 den Hauptdurchschnitt (Fig. 13), hänge an **AB** und **CD** ganz reguläre Fünfecke **I** und **II**; an **AE**, **EC**, **DF**, **FB** halbe Gränzflächen 1, 2, 3, 4 mit ihren Höhen so, daß die rechten Winkel bei **E** und **F** liegen, und endlich an zwei dieser halben regulären Fünfecke füge man wieder zwei ganze **III** und **IV**, so hat man das Netz.

Digitized by Google

§. 13.

Aufgabe. Das Netz der Elementarpyramide eines jeglichen regulären Körpers zu construiren.

Lösung. Man verzeichne die Gränzfläche des Körpers, und errichte über jeder Seite derselben gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel $= R$ sind, also beim Tetraeder $=$ **GA** (Fig. 4), beim Octaeder $=$ **ME** (Fig. 5), beim Ikosaeder $=$ **MA** (Fig. 6), beim Würfel $=$ **MA** (Fig. 7), beim Dodekaeder $=$ **MA** (Fig. 8).

§. 14.

Anmerkung. Eine Probe von der Genauigkeit sämmtlicher Constructionen und eine sinnliche Ueberzeugung von der Richtigkeit aller in den vorhergehenden §§. enthaltenen Angaben kann man sich auf folgende Weise verschaffen. Man zeichnet das Netz des halben Körpers, läßt aber entweder bei bei allen die mit **I** bezeichnete Fläche, oder beim Ikosaeder die mit **VII**, beim Dodekaeder die mit **III** bezeichnete Gränzfläche weg; aus dem Netz fertigt man den halben Körper wirklich an, zieht dann auf der Außenseite des Hauptdurchschnittes sämmtliche Linien, wie in den Figuren 4, 5, 6, 7, 8, und macht bei **M** eine kleine Oeffnung. — Dann verfertigt man auch die Elementarpyramide des treffenden Körpers und steckt dieselbe so in den halben Körper hinein, daß ihre Grundfläche die Stelle der weggelassenen Gränzfläche einnimmt. Die Spitze dieser Pyramide wird sodann im Punkt **M** erscheinen.

Berechnungen für Ikosaeder und Dodekaeder bei gegebenen Kanten mit besonderer Rücksicht auf den Hauptdurchschnitt.

A. Algebraischer Weg.

§. 15.

Aufg. 2. Flächenstücke, Gränzfläche und Oberfläche des Ikosaeders zu berechnen.

Lösung bekannt. — Die Resultate sind **I.** $h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$; **II.** $r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$; **III.** $\varrho = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$

die Gränzfläche: **IV.** $G = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$; Oberfläche: **V.** $O = 20 \cdot G = a^2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}$

§. 16.

Aufg. 2. Flächenstücke, Gränzfläche und Oberfläche des Dodekaeders zu berechnen.

Lösung. Dieselbe ist großentheils verschieden von der gewöhnlichen, der Construction §. 1 angemessen.

Man hat (Fig. 1.): $AC^2 = AB^2 + BC^2$ oder, bezeichnet man **AC** mit z, ferner **AB** und **BC**, wie es §. 1 bestimmt: $z^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 \cdot 5}{4}$ woraus 1) $z = \frac{a \cdot \sqrt{5}}{2}$

Digitized by Google

Dann ist $AD = CD + AC$ oder I. $d = \frac{a}{2} + \frac{a.\sqrt{5}}{2} = \frac{a.(1+\sqrt{5})}{2}$.

Weil die Gerade EK auf AB senkrecht steht (Fig. 2, §. 1 und §. 7), so ist $EK^2 = AE^2 - AK^2 = AK^2$

oder $h^2 = d^2 - (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{a^2.(6+2\sqrt{5})}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}.(5+2\sqrt{5})$, also II. $h = \frac{a}{2}.\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$.

Wenn M der Mittelpunkt des regulären Fünfeckes ist, HL aber senkrecht auf EB steht, so halbirt sowohl MB als LH einen der gleichen Polygonwinkel des Fünfeckes, also $\triangle MKB \sim \triangle ELH$,

$MB : KB = EH : HL$ oder $r : \frac{a}{2} = a : y$, daher $r = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{y}$

$MK : KB = EL : HL$ oder $\varrho : \frac{a}{2} = \frac{d}{2} : y$, daher $\varrho = \frac{a.d}{4} \cdot \frac{1}{y}$

Aber: $y^2 = a^2 - (\frac{1}{2}d)^2 = a^2 - \frac{a^2(6+2\sqrt{5})}{16} = \frac{a^2}{16}.(10-2\sqrt{5})$ also $y = \frac{a}{4}.\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$,

$\frac{1}{y} = \frac{4}{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{10-2\sqrt{5}}} = \frac{4}{a} \cdot \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{80}} = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$; III $r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$

und $\varrho = \frac{a.(1+\sqrt{5})}{8}.\sqrt{(10+2\sqrt{5})} = \frac{a}{8} \cdot \sqrt{\frac{(6+2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{5}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ oder

IV. $\varrho = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{[5.(5+2\sqrt{5})]}$.

Um die Fläche zu finden, ist $\triangle ABE = \frac{a}{2}.h = \frac{a^2}{4}.\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$; ferner

$\triangle AGE + \triangle BHE = dy = \frac{a^2}{8}(1+\sqrt{5})\sqrt{(10+2\sqrt{5})} = \frac{a^2}{8}.(1+\sqrt{5})\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}}.$

$\sqrt{(5+2\sqrt{5})} = \frac{a^2}{8}.(1+\sqrt{5}).(3-\sqrt{5}).\sqrt{(5+2\sqrt{5})} = \frac{a^2}{4} \cdot (-1+\sqrt{5}).\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$

$\triangle ABE + \triangle AGE + \triangle BHE = \frac{a^2}{4}.\sqrt{(5+2\sqrt{5})} + \frac{a^2}{4} \cdot (-1+\sqrt{5}).\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$

So ist endlich V. $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{5}.\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$ VI. $O = 12.G = a^2.3.\sqrt{5}.\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$

Zur Probe $G = \frac{5}{2}a.\varrho. = \frac{5}{2}.a.\frac{a}{10}.\sqrt{5}.(5+2\sqrt{5}) = \frac{a^2}{4}.\sqrt{5}(5+2\sqrt{5})$

§. 17.

Aufgabe 3. Die drei Kugelhalbmesser, den Kubikinhalt des Ikosaeders, seiner Elementarpyramide und seiner drei Kugeln zu rechnen.

Digitized by Google

Aufl. Man bedenke, daß nach §. 6 die Rechtecksseite AD im Hauptdurchschnitt, die Diagonale eines von der Kante gebildeten regulären Fünfeckes ist, daher

$d : a = a : (d - a)$ woraus $d^2 - ad = a^2$ und $d = a \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (nach §. 16.)

Nun ist im Hauptdurchschnitt:

$MG = \frac{GH}{2} = \frac{AD}{2}$ oder I. $\Re = \frac{d}{2} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{4}$ ferner $AM^2 = AG^2 + MG^2$ oder

$R^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + \Re^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2.(6+2\sqrt{5})}{16} = \frac{a^2.(10+2\sqrt{5})}{16}$ also II. $R = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{(10+2\sqrt{5})}$

$MJ^2 = AM^2 - AJ^2$ oder $P^2 = R^2 - r^2 = \frac{a^2.(10+2\sqrt{5})}{16} - \frac{a^2.3}{9} =$

$\frac{a^2}{16.9}(42 + 18.\sqrt{5}) = \frac{a^2}{16.9} \cdot (3+\sqrt{5})^2.3$ also III. $P = \frac{a}{12} \cdot (3+\sqrt{5})\sqrt{3}$

Zur Probe: $EJ^2 = ME^2 - MJ^2$ oder $\varrho^2 = \Re^2 - P^2 = \frac{a^2.(6+2\sqrt{5})}{16} - \frac{a^2.(3+\sqrt{5})^2.3}{16.9}$

$= \frac{a^2}{16.9} \cdot (64 + 18.\sqrt{5} - 42 - 18.\sqrt{5}) = \frac{a^2.3}{4.9}$ daher $\varrho = \frac{a.\sqrt{3}}{6}$

Es bezeichne C den Kubikinhalt des Körpers, K den der kantenberührenden Kugel,
p den der Elementarpyramide, $\mathcal{K}$ „ „ umschriebenen „
K „ „ einbeschriebenen „

so ist: $C = \frac{1}{3} OP = \frac{1}{3} \cdot (a^2.5.\sqrt{3}) \cdot \frac{a.(3+\sqrt{5}).\sqrt{3}}{12} = a^3 \cdot \frac{5}{12} \cdot (3+\sqrt{5})$

$p = \frac{1}{3} \cdot GP = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2.\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a.(3+\sqrt{5}).\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3.(3+\sqrt{5})}{48}$

Probe $C = 20p = a^3 \cdot \frac{4}{12} \cdot (3+\sqrt{5})$

Die Kugelberechnungen liefern folgende Resultate:

$\mathcal{K} = a^3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (2+\sqrt{5})$; $\mathcal{K} = a^3 \cdot \frac{\pi}{24} \cdot (5+\sqrt{5}) \cdot \sqrt{(10+2\sqrt{5})}$; $K = a^3 \cdot \frac{\pi}{54} \cdot (9+4\sqrt{5}) \cdot \sqrt{3}$

§. 18.

Aufgabe 4. Die drei Kugelhalbmesser, den Kubikinhalt des Dodekaeders, seiner Elementarpyramide und seiner drei Kugeln zu rechnen.

Lösung. Man bedenke zuvörderst, daß die mit f. bezeichnete Gerade durch Addition von d und a der Gränzfläche entstanden ist (§. 7) — Man hat $f = a + d$ aber $d = \frac{a}{2} \cdot (1+\sqrt{5})$ nach §. 16 oder 17; also $f = a + \frac{a}{2} \cdot (1+\sqrt{5}) = \frac{a}{2} \cdot (3+\sqrt{5})$

Digitized by Google

$ML = \frac{AC}{2} = \frac{f}{2}$ also I. $\mathfrak{R} = \frac{f}{2} = \frac{a}{4}.(3+\sqrt{5})$

$AM^2 = ML^2 + AL^2$; $R^2 = \mathfrak{R}^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{a^2}{16}(14+6.\sqrt{5}) + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{16}(18+6.\sqrt{5})$

$= \frac{a^2}{16}.(6+2.\sqrt{5}).3$ daher II. $R = \frac{a}{4}(1+\sqrt{5}).\sqrt{3}$

$MG^2 = AM^2 - AG^2$ also $P^2 = R^2 - r^2 = \frac{a^2}{16}.(18+6.\sqrt{5}) - \frac{a^2}{4}\left(\frac{10+2.\sqrt{5}}{5}\right)$

$= \frac{a^2}{16}.\left(\frac{50+22\sqrt{5}}{5}\right)$ III. $P = \frac{a}{4}.\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}$

Zur Probe. $GE^2 = ME^2 - MG^2$ oder $\varrho^2 = \mathfrak{R}^2 - P^2 = \frac{a^2}{16}.(14+6.\sqrt{5}) - \frac{a^2}{16}.$

$\left(\frac{50+22.\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{a^2}{16}.\left(\frac{20+8\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{a^2}{4}.\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)$ daher $\varrho = \frac{a}{2}.\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

IV. $C = \frac{1}{2}.O.P = \frac{1}{2}[a^2.3.\sqrt{5}.\sqrt{(5+2\sqrt{5})}].\left(\frac{a}{4}\sqrt{\frac{50+22.\sqrt{5}}{5}}\right) = \frac{a^3}{4}.\sqrt{(470+210\sqrt{5})}$

$= \frac{a^3}{4}.(15+7.\sqrt{5})$ V. $p = \frac{1}{3}.GP = \frac{1}{3}.\left(\frac{a^2}{4}.\sqrt{5}.\sqrt{(5+2.\sqrt{5})}\right).\left(\frac{a}{4}.\sqrt{\frac{50+33.\sqrt{5}}{5}}\right)$

$= \frac{a^3}{48}.\sqrt{(470+210.\sqrt{5})} = \frac{a^3}{48}.(15+7.\sqrt{5})$

Es ist aber $C = 12.p = 12.\frac{a^3}{48}.(15+7.\sqrt{5}) = \frac{a^3}{4}.(15+7.\sqrt{5})$

Für die drei Kugeln ergeben sich folgende Resultate:

$\mathfrak{K} = a^3.\frac{\pi}{6}.(9+4.\sqrt{5})$ $K = a^3.\frac{\pi}{2}.(2+\sqrt{5}).\sqrt{3}$ $K = a^3.\frac{\pi}{120}.(11+\sqrt{5}).\sqrt{(50+22.\sqrt{5})}$

B. Trigonometrische Methode.

Bemerkung. Zu Grunde gelegt ist die Definition der trigonometrischen Functionen, wie sie in §. 139 von M. Ohm's Elementar-Mathematik enthalten sind.

§. 19.

Aufgabe 1. Flächenstücke, Gränzfläche und Oberfläche des Ikosaeders zu berechnen.

Lösung. Der Umfangswinkel sowohl als der halbe Centriwinkel eines gleichseitigen Dreiecks ist $= 60°$, daher $\sin 60° = \frac{(\frac{1}{2}a)}{r}$ $\operatorname{cotg} 60° = \frac{\varrho}{(\frac{1}{2}a)}$ woraus I. $h = a.\sin 60°$;

II. $r = \frac{a}{2.\sin 60°}$; III. $\varrho = \frac{a}{2}.\operatorname{cotg} 60$; IV. $G = \frac{a^2}{2}.\sin 60°$; V. $O = a^2.10.\sin 60°$

Digitized by Google

§. 20.

Aufgabe 2. Flächenstücke, Gränzfläche und Oberfläche des Dodekaeders zu berechnen.

Lösung. Von dem regulären Fünfeck Fig. 2 wird nach §. 16 ebenso wie durch ϱ der Polygonwinkel von 180° und die Seite, so auch durch y der Polygonwinkel und die Diagonale halbirt: daher

$\sin 54° = \frac{(\frac{1}{2}d)}{a}$ woraus I. $\frac{d}{2} = a \,.\, \sin 54°$; ferner $\cos 54° = \frac{y}{a}$ woraus II. $y = a \,.\, \cos 54°$

$\cos 54° = \frac{\frac{1}{2}a}{r}$ woraus III. $r = \frac{a}{2 \,.\, \cos 54°}$; ferner $\operatorname{tg} 54° = \frac{\varrho}{\frac{1}{2}a}$ woraus

IV. $\varrho = \frac{a}{2} \,.\, \operatorname{tg} 54°$

Endlich durch die Gerade h wird der W. AEB halbirt, so daß also AEK = 18° ist:

$\operatorname{cotg} 18° = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$ also V. $h = \frac{a}{2} \,.\, \operatorname{cotg} 18°$ VI. $G = \frac{5}{2} \,.\, a \,.\, \varrho = \frac{5a^2}{4} \,.\, \operatorname{tg} 54°$

VI. $O = 12 \,.\, G = a^2 \,.\, 15 \,.\, \operatorname{tg} 54°$

§. 21.

Aufgabe 3. Die drei Kugelhalbmesser, den Kubikinhalt des Ikosaeders und seiner Elementarpyramide zu bestimmen.

Lösung. Man bedenke, daß nach §. 5 die Rechtecksseite AD im Hauptdurchschnitt die Diagonale eines von der Kante gebildeten regulären Fünfeckes ist, also nach §. 20 I.

$$\frac{d}{2} = a \,.\, \sin 54°; \quad \text{aber I. } R = GM = \frac{AD}{2} = \frac{d}{2} = a \,.\, \sin 54°$$

Um für *R* eine bequeme Formel sogleich zu erhalten, berücksichtige man die durch Construction erzeugten Eigenschaften des △ ABC. Dasselbe ist rechtwinklig und die eine Kathete BC ist die Verlängerung der andern AB nach dem äußern und mittlern Verhältniß (oder was dasselbe sagen will, AB ist das größere Stück der nach dem goldenen Schnitt getheilten Geraden BC), daher AC die Seite eines Fünfecks seyn kann, welchem ein Kreis mit dem Halbmesser BC umschrieben ist. Nach §. 20 ist im regulären Fünfeck $\cos 54° = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{r}$ hier also:

Digitized by Google

$\cos 54° = \frac{\frac{1}{2}AC}{BC}$ woraus $\frac{1}{2}AC = BC \cdot \cos 54°$

oder II. $R = d \cdot \cos 54° = a \cdot 2 \cdot \sin 54° \cdot \cos 54° = a \cdot \sin 108° = a \cdot \sin 72°$

Um ferner für P eine bequeme Formel zu bekommen, berechne man erſt den $\sin \frac{\varphi}{2}$.

W. $AED = \varphi$, ſiehe §. 5; ferner W. EQA = ein rechter, und W. $AEQ = \frac{\varphi}{2}$ alſo

$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{AQ}{AE} = \frac{R}{h} = \frac{a \cdot \sin 54°}{a \cdot \sin 60°} = \frac{\sin 54°}{\sin 60°}$ aber auch $\triangle EJM$ rechtwinklig,

aber $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{JM}{EM}$ woraus $JM = EM \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$ oder III. $P = \Re \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = a \cdot \frac{(\sin 54°)^2}{\sin 60°}$

Man erhält nun weiter für: $C = \frac{1}{3} \cdot O \cdot P = \frac{1}{3} \cdot (a^2 \cdot 10 \cdot \sin 60°) \cdot \left(a \cdot \frac{(\sin 54°)^2}{\sin 60°} \right) =$

$a^3 \cdot \frac{10}{3} \cdot (\sin 54°)^2$ und $p = \frac{1}{3} \cdot G \cdot P = \frac{a^3}{6} \cdot (\sin 54°)^2$

§. 22.

Hilfsſatz. Wenn eine Gerade nach dem äußern und mittleren Verhältniſſe getheilt, dann an ihrem Ende eine Senkrechte = dem kleineren Stück errichtet, und die Hypotenuſe gezogen wird, ſo iſt dieſe gleich der Höhe eines gleichſeitigen Dreieckes, welches das doppelte größere Stück zur Seite hat.

Beweis. Es ſey a die ganze Gerade, b das größere Stück, x die Hypotenuſe, ſo iſt die Bedingung 1) $a : b = b : (a - b)$, 2) $x^2 = a^2 + (a - b)^2$ Beh. $x^2 = (2b)^2 - b^2 = 3b^2$

Aus 2) $x^2 = a^2 + (a - b)^2 = 2a^2 - 2ab + b^2 = 2a \cdot (a - b) + b^2$ aber aus 1) $a(a - b) = b^2$ alſo $x^2 = 2 \cdot b^2 + b^2 = 3b^2$ was zu beweiſen war.

§. 23.

Aufgabe 4. Die drei Kugelhalbmeſſer, den Kubikinhalt des Dodekaeders und ſeiner Elementarpyramide zu beſtimmen.

Löſung. Man erwäge, daß nach §. 7 die Gerade AC oder f ſelbſt wieder Diagonale eines Fünfeckes iſt, wovon d die Seite, alſo I. $\frac{f}{2} = d \cdot \sin 54° = 2a \cdot (\sin 54°)^2$ cf. §. 20.

I. $\Re = \frac{f}{2} = 2a \cdot (\sin 54°)^2$

Digitized by Google

Um eine bequeme Formel für R zu erhalten, bedenke man, daß in dem rechtwinkligen $\triangle ABD$ die Kathete AB das kleinere Stück von BD ist, wenn diese letztere nach dem goldenen Schnitt getheilt wird, und daß $BD - AB$, das größere Stück, der Diagonale d gleicht. Ferner ist $\triangle AML \sim \triangle ADB$, jedoch nur alle Dimensionen halb so groß, daher das größere Stück von $ML = \frac{d}{2}$. Nach §. 22 ist AM so groß wie die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, wovon die Seite doppelt so groß als das größere Stück von ML, also $= d$ ist.

II. $R = d \,.\, \sin 60° = 2 \,.\, a \,.\, \sin 60° . \sin 54°$.

Um P zu bestimmen, suche man zuerst $\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \frac{\left(\frac{f}{2}\right)}{\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{f}{d} = \frac{4 \,.\, (\sin 54°)^2}{2 \,.\, \sin 54} = 2 \,.\, \sin 54°$

aber auch $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{MG}{EG} = \frac{P}{\rho}$ woher III. $P = \rho \,.\, \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = a \,.\, \operatorname{tg} 54° \,.\, \sin 54°$

IV. $C = \frac{1}{3} O \,.\, P = a^3 \,.\, 5 \,.\, \sin 54° \,.\, (\operatorname{tg} 54°)^2$

V. $p = \frac{1}{3} G \,.\, P = a^3 \,.\, \frac{5}{12} \,.\, \sin 54° \,.\, (\operatorname{tg} 54)^2$

§. 24.

Berechnung der Flächenwinkel und der Kanten-Neigung zur Gränzfläche sowohl für Ikosaeder als Dodekaeder.

Für das Ikosaeder:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{R}{h} = \frac{a \,.\, \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)}{a \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2 \,.\, \sqrt{3}} = \frac{3{,}23606 \,.\, \sqrt{3}}{6} \quad \text{oder} \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{R}{h} = \frac{\sin 54°}{\sin 54°} \text{ §. 21.}$$

Erste Rechnung.

$\log \sqrt{3}$	$= 0{,}2385606$
$\log 3{,}23606$	$= 0{,}5100165$
$\log \frac{1}{6}$	$= 9{,}2218487$
$\log \sin \frac{\varphi}{2}$	$= 9{,}9704258$

Zweite Rechnung.

$\log \sin 54°$	$= 9{,}9079576$
$\log \sin 60°$	$= 9{,}9375306$
$\log \sin \frac{\varphi}{2}$	$= 9{,}9703270$

woraus $\frac{\varphi}{2} = 69° \, 5' \, 40{,}3$ also $\varphi = 138° \, 11' \, 20{,}6''$

Bezeichnet $\Psi = \text{W. } BAE$ den Neigungswinkel der Kante zur Seitenfläche, so ist $\Psi = 180° - \frac{\varphi}{2} = 110° \, 54' \, 19{,}7''$.

Digitized by Google

Für das Dodekaeder:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 2 \cdot \sin 54^\circ \quad \text{nach §. 23} \quad \begin{cases} \log 2 = 0{,}3010300 \\ \log \sin 54^\circ = 9{,}9079576 \end{cases}$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 10{,}2089876$$

$$\frac{\varphi}{2} = 58^\circ\ 16'\ 59{,}2''$$

$$\varphi = 116^\circ\ 33'\ 58{,}4'' \quad \text{W. BAE} = \Psi = 121^\circ\ 43'\ 0{,}8''$$

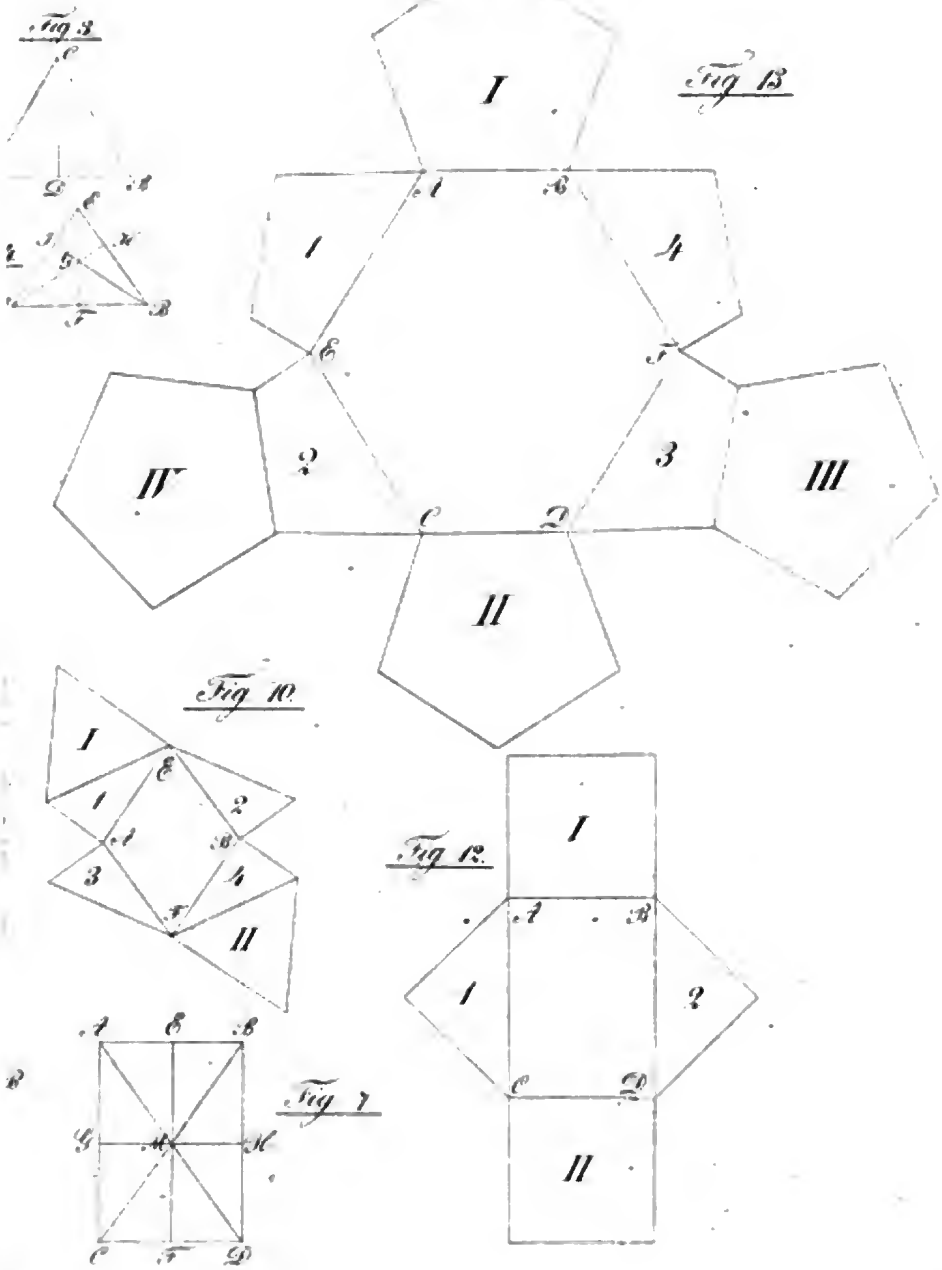
Zusatz. Mittelst des Hauptdurchschnittes läßt sich auch darthun, daß der Flächenwinkel des Ikosaeders eben so groß ist, als der stumpfe Winkel, den zwei Eckachsen des Dodekaeders mit einander bilden, und umgekehrt; nämlich $\triangle$ AEM des Hauptdurchschnitts Fig. 6 $\sim \triangle$ AME des Hauptdurchschnitts 7, so daß der W. E des einen, dem W. M des andern entspricht. Man könnte deßwegen auch mit φ des Dodekaeders eine bequeme Formel für R des Ikosaeders und umgekehrt entwickeln.

Schlußbemerkung.

Vorliegendes Programm hat den Zweck, den Nutzen des Hauptdurchschnittes in Beziehung auf Vorstellung und Rechnung zu zeigen. Ein gründlicher Beweis für die Existenz und die Beschaffenheit dieses Hauptdurchschnittes, abgeleitet aus der Definition der Körper und aus den Eigenschaften körperlicher Ecke, ist vollendet. Derselbe kann aber wegen Beschränktheit des Raums nicht veröffentlicht werden.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google